

常开空心轴裂纹转子系统的动力学特性

路振勇¹, 陈予恕¹, 侯磊¹, 李忠刚^{1,2}

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001;

2. 哈尔滨工业大学 机电工程学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 研究了常开空心轴裂纹转子系统的动力学特性. 考虑裂纹单元截面中性轴的时变特性, 推导了裂纹转子的刚度矩阵, 考虑重力及不平衡激励, 采用有限元法建立了常开空心轴裂纹转子系统的动力学方程. 采用谐波平衡法对方程进行求解, 给出了不同裂纹深度下的三维幅频图, 表明在临界转速和亚临界转速处均有峰值出现; 分析了裂纹深度、裂纹位置对该系统的临界转速的影响, 表明位于跨中靠近惯性量较大圆盘的深裂纹对常开空心轴裂纹转子系统的影响大, 临界转速下降快; 计算了该系统在亚临界转速时的非线性振动响应, 结果表明: 亚临界转速下常开空心轴裂纹转子系统会发生超谐共振现象. 所提出的空心轴裂纹的建模方法为航空发动机转子系统裂纹故障的非线性动力学分析提供了理论指导.

关 键 词: 常开空心轴裂纹; 航空发动机高压转子系统; 有限元法; 谐波平衡法; 超谐共振

中图分类号: V231.96

文献标志码: A

Dynamic characteristics of a open crack in hollow shaft rotor system

LU Zhen-yong¹, CHEN Yu-shu¹, HOU Lei¹, LI Zhong-gang^{1,2}

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. School of Mechatronics Engineering,

Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Dynamic characteristics of a open crack in hollow shaft rotor system was investigated. By using the finite element method, the equations of motion were formulated, where the weight and the unbalanced excitation were considered and the stiffness matrix was derived with the consideration of the time-varying of the neutral axis in the crack element cross-section. By using the harmonic balance method, the equations were solved approximately and analyzed numerically. The three-dimensional amplitude-frequency curves of different crack depth were obtained to indicate that the vertical response peaks were presented at critical rotating speeds and the subcritical rotating speeds. The varying of the critical rotating speed versus different depths and different locations of the crack was analyzed to obtain that the deeper crack which located near the disc with a larger inertia parameter made a greater impact on the system, and the critical rotating speed decrease quick. The nonlinear responses of the system at the subcritical rotating speeds were investigated respectively, where the super-harmonic resonances were shown correspondingly. The proposed modeling method of the hollow shaft crack provides a theoretical guidance for nonlinear dynamic studying the aero-engine rotor systems with crack faults.

收稿日期:2013-09-18

基金项目:国家自然科学基金(11302058,10632040); 国家重点基础研究发展计划(2015CB057405)

作者简介:路振勇(1988—),男,山东德州人,博士生,主要从事航空发动机非线性转子动力学研究.

Key words: open crack in hollow shaft; aero-engine high pressure rotor system; finite element method; harmonic balance method; super-harmonic resonance

裂纹故障是航空发动机、燃气轮机等机械的常见故障之一,危害极大^[1-2],由于材质、材料加工等引起应力集中及疲劳服役、腐蚀等因素,在叶片、转盘、转轴处会出现裂纹。20世纪70年代,人们开始研究在一些水平重型涡轮机中的横向裂纹故障,1976年 Gasch^[3]提出铰链弹簧模型来研究简单实心轴裂纹转子的振动特性。迄今国内外关于转子裂纹研究的文献一般是围绕着轴裂纹的刚度模型^[3-7]、裂纹转子的非线性动力学特性^[8-9]、裂纹转子耦合故障^[10]、裂纹的检测诊断识别^[11]和裂纹转子的实验研究^[12-13]等方面展开。

轴裂纹转子系统方程的建立关键在于求解转子的刚度。早期文献^[14-15]研究对象大都是轴裂纹位于圆盘根部的 Jeffcott 模型,轴段采用 Rayleigh 梁-轴模型,忽略陀螺效应,从断裂力学角度出发,求解裂纹局部附加柔度,进而求解裂纹转子刚度。在最近的研究中,不少学者考虑裂纹截面中性轴及截面惯性矩的变化, Sinou 等^[6,9,16]和 Al-Shudeifat 等^[4,17-18]研究实心轴裂纹转子时,认为裂纹单元截面在旋转过程中,截面惯性矩和惯性积是时间的函数,由此建立了新的求解裂纹转子刚度的模型;考虑重力占优及不平衡力,对实心轴横向裂纹转子的建模及动力学分析做了大量工作,他们的方法适用于裂纹位于任意位置的研究。

为了提高效率,航空发动机一般采用双转子结构,且高压转子均采用空心轴^[19]。但目前为止,人们对空心轴裂纹转子的研究不多。本文采用基于裂纹单元截面中性轴时变和形心随裂纹扩展变化原则求解裂纹转子刚度的方法,推导了 Timoshenko 梁-空心轴常开裂纹转子系统刚度矩阵,求解分析了航空发动机常开空心轴裂纹转子系统的非线性振动响应。

1 常开空心轴裂纹转子系统建模

1.1 航空发动机常开空心轴裂纹转子系统模型

某双转子涡轮风扇航空发动机高压转子系统见图1。其中,高压压气机9级加一个封严篦齿盘,高压涡轮1级;高压转子为刚性连接,支承在两个支点上;支承形式是由高压压气机转子和高压涡轮转子组成的二支点结构,采用1-0-1转子支承方案。

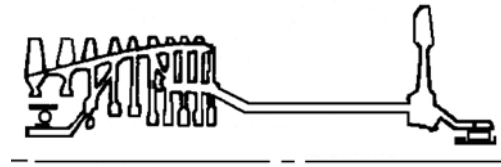


图1 航空发动机高压转子系统

Fig. 1 Aero-engine high pressure rotor system

针对图1所示的高压转子系统,建立了含有常开空心轴裂纹转子系统(下文简称系统)有限元模型,如图2所示。

图2模型中考虑轴段单元为 Timoshenko 梁-空心轴模型。图中 R 为外半径, r 为内半径。圆盘为刚性圆盘,其中第1级圆盘是9级压气机盘和封严篦齿盘在质心处的集中,并带有不平衡质量,第2级圆盘是涡轮盘;轴承支承采用等刚度线性对称支承。根据轴段实际长度及圆盘集中位置,将常开空心轴裂纹转子系统(下文简称系统)划分为13节点12个单元,其中支承在两端位于第1和第13节点,圆盘分别位于第4和第10节点。

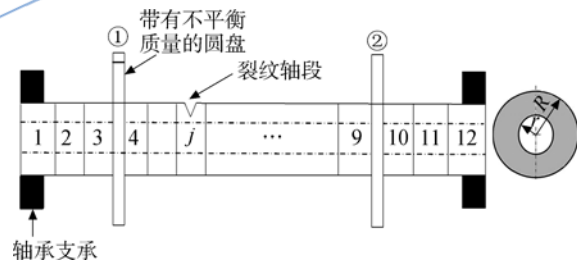


图2 常开空心轴裂纹转子系统有限元模型

Fig. 2 Finite element model for a open crack in hollow shaft rotor system

1.2 空心轴裂纹单元刚度矩阵推导

裂纹单元截面坐标如图3所示,图中阴影部分表示未开裂。 O 是不含裂纹时截面的中心, c 是出现裂纹后截面的中心, $O-XY$ 为固定坐标系, $O-xy$ 是旋转坐标系, Ox 和 Oy 分别垂直和平行于裂纹方向, $c-\bar{X}\bar{Y}$ 是以 c 为原点且平行于 $O-XY$ 的坐标系, $c-\bar{x}\bar{y}$ 是以 c 为原点且平行于 $O-xy$ 的坐标系, $e=Oc$ 表示中心位置的变化量, h 是裂纹的深度, ϕ 是裂纹初始位置角, Ω 是转子转速, α 表示裂纹角, 外半径为 R 。

对于系统,裂纹单元截面惯性矩的求解分两

种情况^[20]:裂纹未贯穿内环(图4)和裂纹贯穿内环(图5)。

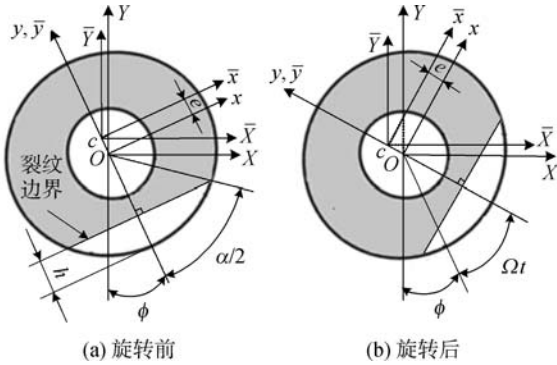


图3 裂纹单元截面坐标图

Fig. 3 Coordinate diagrams of cracked element cross-section

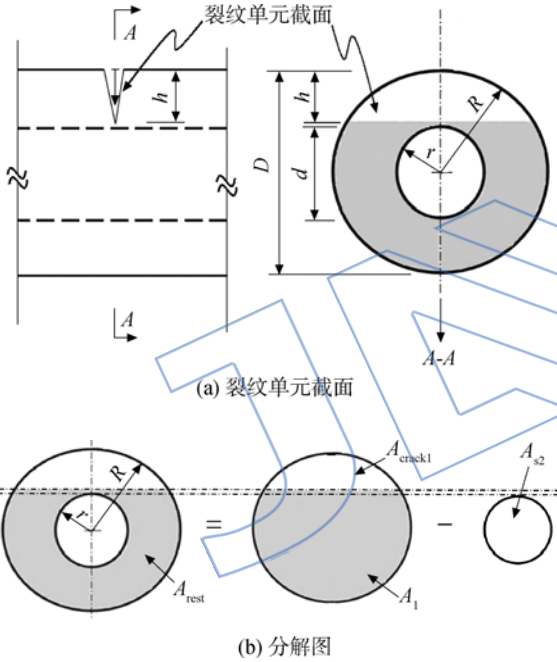


图4 裂纹未贯穿内环时裂纹单元截面示意图

Fig. 4 Schematic of cracked element cross-section when crack not through inner ring

设外圆截面的面积为 $A_{s1} = A_{crack1} + A_1$, 其中 A_{crack1} 表示外圆裂纹部分的面积, A_1 表示外圆未开裂部分的面积; 内圆截面的面积为 $A_{s2} = A_{crack2} + A_2$, 其中 A_{crack2} 表示内圆裂纹部分的面积, A_2 表示内圆未开裂部分的面积. 圆环剩余部分的面积 $A_{rest} = A_1 - A_2$, 可知

$$A_1 = A_{ce} = R^2[\pi - \alpha/2 + (1 - \mu)\gamma] \quad (1a)$$

$$A_2 = \pi r^2 - \frac{\alpha_1 r^2}{2} + \sqrt{r^2 - (R - h)^2}(R - h) \quad (1b)$$

其中 $\alpha = 2\arccos(1 - \mu)$, 表示外圆的裂纹角及未

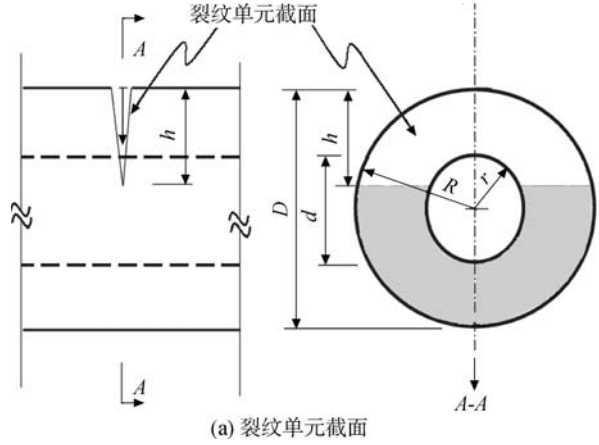


图5 裂纹贯穿内环时裂纹单元截面示意图

Fig. 5 Schematic of cracked element cross-section when crack through inner ring

贯穿情况下内圆的裂纹角, $\alpha_1 = 2\arccos[(R - h)/r]$, 表示裂纹贯穿情况下内圆的裂纹角, $\mu = h/R$, 表示无量纲的裂纹深度, $\gamma = \sqrt{\mu(2 - \mu)}$.

设初始位置角 $\phi = 0$, 则对于未贯穿情况下有截面形心位置的变化量为

$$e = \left(\int_{-(R-h)}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} y dy \right) / A_{rest} \quad (2)$$

对于裂纹贯穿情况

$$e = \left(\int_{-(R-h)}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} y dy - \int_{-(R-h)}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} y dy \right) / A_{rest} \quad (3)$$

由图3可知, 当裂纹深度一定时, 旋转过程中裂纹单元截面相对旋转坐标系 $c-\bar{x}\bar{y}$ 的截面惯性矩是不变的, 而相对于固定坐标系 $c-\bar{X}\bar{Y}$ 是时变的, 时变的惯性矩及惯性积 $I_{\bar{X}}(t)$, $I_{\bar{Y}}(t)$, $I_{\bar{X}\bar{Y}}(t)$ 为

$$I_{\bar{X}}(t) = \frac{I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}}{2} + \frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{y}}}{2} \cos(2\Omega t) + I_{\bar{x}\bar{y}} \sin(2\Omega t) \quad (4a)$$

$$I_{\bar{Y}}(t) = \frac{I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}}{2} - \frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{y}}}{2} \cos(2\Omega t) - I_{\bar{x}\bar{y}} \sin(2\Omega t) \quad (4b)$$

$$I_{\bar{X}\bar{Y}}(t) = -\frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{y}}}{2} \sin(2\Omega t) + I_{\bar{x}\bar{y}} \cos(2\Omega t) \quad (4c)$$

其中

$$I_{\bar{x}} = I_x - A_{ce} e^2 = I_{Ax} - I_{Bx} - A_{ce} e^2 \quad (5a)$$

$$I_{\bar{y}} = I_y = I_{Ay} - I_{By} \quad (5b)$$

对于外圆截面

$$I_{Ax} = \frac{\pi R^4}{8} +$$

$$\frac{R^4}{4} [(1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu + 1)\gamma + \arcsin(1-\mu)] \quad (6a)$$

$$I_{Ay} = \frac{\pi R^4}{4} -$$

$$\frac{R^4}{12} [(1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu - 3)\gamma + 3\arcsin \gamma] \quad (6b)$$

对于内圆截面,裂纹未贯穿内环时

$$I_{Bx} = I_{By} = \pi r^4 / 4 \quad (7)$$

裂纹贯穿内环时

$$I_{Bx} = \frac{\pi r^4}{4} - \int_{-r}^{-(R-h)} 2 \sqrt{r^2 - y^2} y^2 dy \quad (8a)$$

$$I_{By} =$$

$$\frac{\pi r^4}{4} - \int_{\sqrt{r^2 - (R-h)^2}}^0 2 [\sqrt{r^2 - x^2} - (R-h)] x^2 dx \quad (8b)$$

式(4)和式(5)中, $I_{\bar{x}}, I_{\bar{y}}$ 和 I_x, I_y 表示旋转坐标系下裂纹转子裂纹单元未开裂部分对 $c\bar{x}$ 轴、 $c\bar{y}$ 轴和对 Ox 轴、 Oy 轴的惯性矩. 由于 Oy 和 $c\bar{y}$ 是截面的对称轴, 所以有 $I_{\bar{x}\bar{y}} = 0$.

假设裂纹位于第 j 个单元, 对于 Timoshenko 梁-空心轴模型, 裂纹单元在旋转坐标系中的刚度矩阵可写成

$$k_r^j = \frac{E}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12I_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & 6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & -12I_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & 6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} \\ 0 & 12I_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & -6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 0 & 0 & -12I_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & -6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 0 \\ 0 & -6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & l^2 I_{\bar{y}} \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} & 0 & 0 & 6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & l^2 I_{\bar{y}} \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} & 0 \\ 6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & l^2 I_{\bar{x}} \frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} & -6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & l^2 I_{\bar{x}} \frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} \\ -12I_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & -6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 12I_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & -6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} \\ 0 & -12I_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 0 & 0 & 12I_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & 0 \\ 0 & -6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & l^2 I_{\bar{y}} \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} & 0 & 0 & 6Il_{\bar{y}} \frac{1}{1+\phi_2} & l^2 I_{\bar{y}} \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} & 0 \\ 6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & l^2 I_{\bar{x}} \frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} & -6Il_{\bar{x}} \frac{1}{1+\phi_1} & 0 & 0 & l^2 I_{\bar{x}} \frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $\phi_1 = \frac{12EI_{\bar{x}}}{\mu A_{\text{rest}} Gl^2}$, $\phi_2 = \frac{12EI_{\bar{y}}}{\mu A_{\text{rest}} Gl^2}$, $G = E/[2(1+\nu)]$, E 为弹性模量, ν 为泊松比, μ 为截面剪切系数.

当转子转动后, 经过坐标变换^[17]可得裂纹单

元未开裂部分在固定坐标系 $c\bar{X}\bar{Y}$ 下的刚度矩阵

$$k_i^j = \Psi^T k_r^j \Psi \quad (10)$$

其中 Ψ 是旋转坐标系 $O-x\bar{y}$ 到固定坐标系 $O-XY$ 或者旋转坐标系 $c-\bar{x}\bar{y}$ 到固定坐标系 $c-\bar{X}\bar{Y}$ 下的坐标转换矩阵

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

将 Ψ 代入式(10)并展开,可得

$$\mathbf{k}_f^j = \mathbf{k}_a^j + \mathbf{k}_b^j \quad (11)$$

由式(4),展开可得

$$\mathbf{k}_f^j = \mathbf{k}_1^j + \mathbf{k}_2^j \cos(2\Omega t) + \mathbf{k}_3^j \sin(2\Omega t) \quad (12)$$

其中刚度矩阵 $\mathbf{k}_a^j, \mathbf{k}_b^j, \mathbf{k}_1^j, \mathbf{k}_2^j, \mathbf{k}_3^j$ 及矩阵内元素表达式见附录中式(A1)~式(A5)。

1.3 系统动力学方程

根据转子动力学有限元法^[21-22],系统的动力学微分方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \cos(2\Omega t) + \\ \mathbf{K}_3 \sin(2\Omega t)]\mathbf{q}(t) = \\ \mathbf{F}_1 \cos(\Omega t) + \mathbf{F}_2 \sin(\Omega t) + \mathbf{F}_g \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{M}, \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ 和 $\mathbf{K}_3$ 均为 $4(N+1) \times 4(N+1)$ 的矩阵; $\mathbf{q}(t), \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 和 $\mathbf{F}_g$ 是 $4(N+1) \times 1$ 的向量; N 是轴段数, $N+1$ 是节点数; $\mathbf{M}$ 是系统的质量矩阵; $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{G} + \mathbf{C}$ 是由回转矩阵和阻尼矩阵组成的矩

阵; $\mathbf{K}_1$ 是系统的总刚度矩阵, 裂纹单元处的值由 $\mathbf{k}_f^j$ 代替; $\mathbf{K}_2$ 和 $\mathbf{K}_3$ 是 $4(N+1) \times 4(N+1)$ 矩阵, 除去裂纹单元 j 处元素外均为零, 裂纹单元 j 处的值由 $\mathbf{k}_2^j$ 和 $\mathbf{k}_3^j$ 贡献; $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 是不平衡激励向量, 对于存在不平衡激励的单元, $\mathbf{F}_1^i = m_e^i d_0 \Omega^2 [\cos \beta \quad \sin \beta \quad 0 \quad 0]$; $\mathbf{F}_2^i = m_e^i d_0 \Omega^2 [-\sin \beta \quad \cos \beta \quad 0 \quad 0]$, d_0 为偏心量; β 是不平衡质量偏角; m_e 为偏心质量; $\mathbf{F}_g$ 是 $4(N+1) \times 1$ 的重力向量。

2 方程求解

根据谐波平衡法^[17], 设系统动力学微分方程(13)的解为

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n [\mathbf{A}_i \cos(k\Omega t) + \mathbf{B}_i \sin(i\Omega t)] \quad (14)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$ 是谐波次数, 将式(14)代入方程(13), 得式(15)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & 0 & 0.5 \mathbf{K}_2 & 0.5 \mathbf{K}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1^{(1)} + \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1^{(1)} + \mathbf{C}_3 & 0 & 0 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{C}_1^{(1)} + \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_1^{(1)} - \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_2 & 0 & 0 & \mathbf{C}_1^{(2)} & \mathbf{C}_1^{(2)} & 0 & 0 & -\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_3 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_1^{(2)} & \mathbf{C}_1^{(2)} & 0 & 0 & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & 0 & 0 & \mathbf{C}_1^{(3)} & \mathbf{C}_1^{(3)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_1^{(3)} & \mathbf{C}_1^{(3)} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & 0 & 0 & \mathbf{C}_1^{(4)} & \mathbf{C}_1^{(4)} & \dots & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_1^{(4)} & \mathbf{C}_1^{(4)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & 0 & 0 & \mathbf{C}_1^{(n)} & \mathbf{C}_1^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_1^{(n)} & \mathbf{C}_1^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{B}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_g \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{C}_1^{(s)} = s\Omega \hat{\mathbf{C}}, s=1, 2, \dots, n; \mathbf{C}_2 = (1/2)\mathbf{K}_2; \mathbf{C}_3 = (1/2)\mathbf{K}_3; \mathbf{C}^{(s)} = \mathbf{K}_1 - (s\Omega)^2 \mathbf{M}, n$ 是谐波次数。确定系统的各项参数后, 根据式(15)求得 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), 即可求得系统各点的响应, 分析系统的动力学特性。

3 数值计算结果分析

采用数值方法, 根据式(15), 计算了系统有限元模型的非线性动力学特性。轴段采用 Timoshenko 梁-空心轴, 系统有限元模型是不对称的系统, 压气机圆盘质量约为涡轮圆盘质量的 1.8 倍; 支承为线性弹性支承, 刚度为 $k_{yy} = k_{zz} = 9 \times 10^9$ N/m, 仅在圆盘 1 处有不平衡量, 空心轴内外半径比 $r/R \approx 0.97$ 。无量纲裂纹深度 $\mu = h/R$, 材料为钛合金。计算时取 4 次谐波分量。下述情况如无

特别说明, 则取不平衡偏角和不平衡量为 $\beta = 0^\circ$, $m_e d = 5 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}$, 支承阻尼为 $500 (\text{N} \cdot \text{s})/\text{m}$, 裂纹初始位置角 $\phi = 0^\circ$, 由计算可得, 对于无裂纹的线性转子系统, 1 阶临界转速为 $\Omega_1 = 1.205 \times 10^4 \text{ r/min}$, 2 阶临界转速为 $\Omega_2 = 2.721 \times 10^4 \text{ r/min}$ 。

图 6 给出了裂纹位于第 7 单元时, 节点 4 处的无量纲裂纹深度-转速-振动幅值三维瀑布图。分析图 6 可知: 随着裂纹的产生及扩展, 系统在 1 阶临界转速处和 1 阶、2 阶的亚临界转速附近均会出现峰值, 系统的 1 阶临界转速随着裂纹深度增加减小; 系统在 1/2 倍、1/3 倍、1/4 倍 1 阶、2 阶亚临界转速附近出现响应峰值, 且 1/2 倍、1/3 倍、1/4 倍 1 阶临界转速附近峰值和 1/2 倍、1/3 倍 2 阶临界转速附近峰值随着裂纹的出现及加深十分明显。总之, 裂纹出现后, 幅频图中临界转速

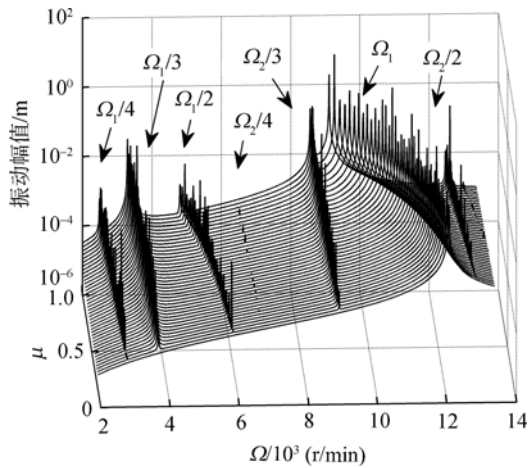


图6 无量纲裂纹深度-转速-振动幅值三维瀑布图
Fig. 6 Three-dimensional waterfall of non-dimensional crack depth, rotating speed and vibration amplitude

和各阶亚临界转速附近会出现峰值;幅频图中各阶亚临界转速处峰值的出现是裂纹存在的标志。

图7给出了裂纹分别位于不同轴段单元时系统1阶临界转速随无量纲裂纹深度的变化情况,分析可知:裂纹位置一定时,随着裂纹的扩展加深,1阶临界转速下降;裂纹位于两端(单元1、单元12)时,1阶临界转速随着无量纲裂纹深度的增加下降比较缓慢,裂纹位于中间位置时,下降比较

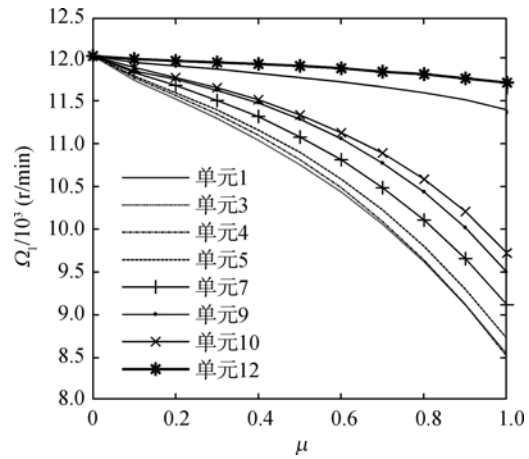


图7 不同裂纹单元下系统1阶临界转速随无量纲裂纹深度的变化曲线

Fig. 7 Variation curves of the 1st order critical rotating speed of system varying with non-dimensional crack depth for different cracked elements

快,且裂纹靠近压气机集中圆盘附近(单元3~单元5)时,下降最快。以上说明裂纹的出现会“削弱”系统的刚度,降低1阶临界转速;位于支承端附近的浅裂纹对系统的影响较小,位于跨中靠近惯性量较大圆盘的深裂纹,对系统的影响相对较大。

图8~图10给出了裂纹位于单元7, $\mu =$

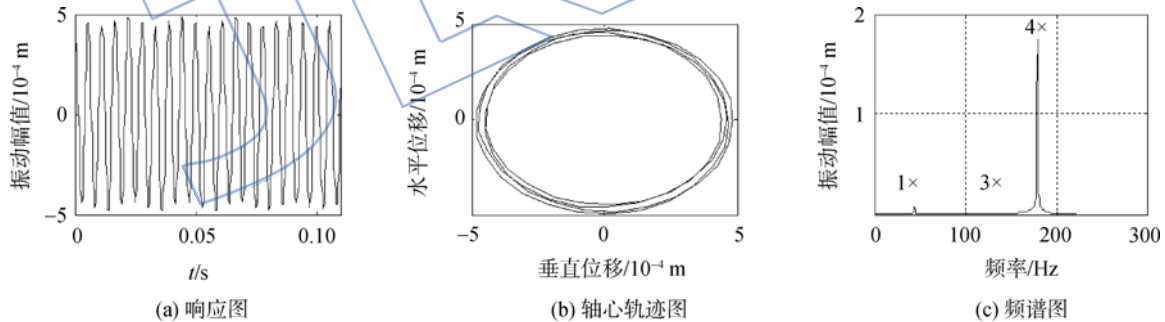


图8 节点4在 $\Omega=2697$ r/min时系统的振动响应

Fig. 8 Vibration response of system at node 4, $\Omega=2697$ r/min

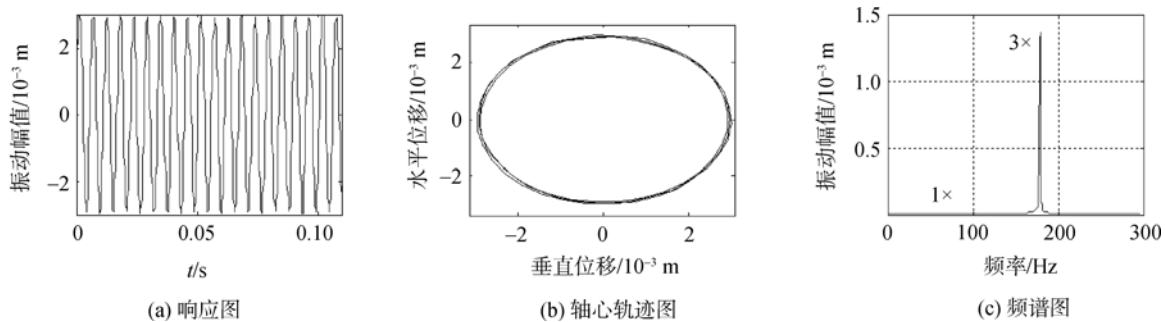
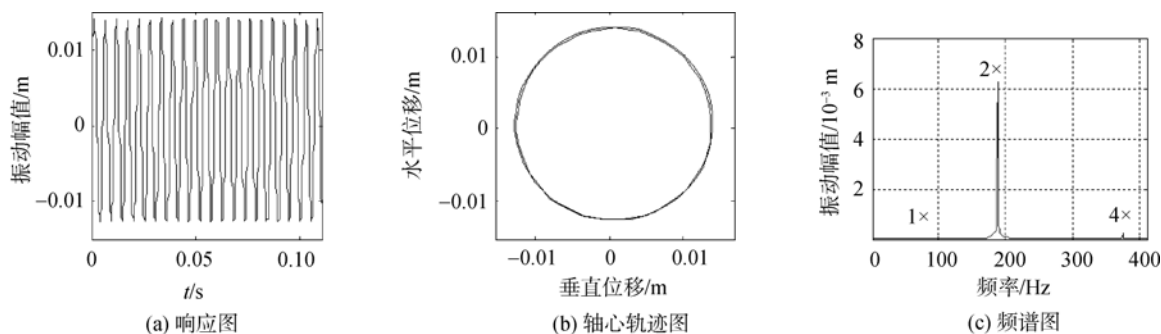


图9 节点4在 $\Omega=3571$ r/min时系统的振动响应

Fig. 9 Vibration response of system at node 4, $\Omega=3571$ r/min

图10 节点4在 $\Omega=5628\text{ r/min}$ 时系统的振动响应Fig. 10 Vibration response of system at node 4, $\Omega=5628\text{ r/min}$

0.375, 节点4处在亚临界转速 $\Omega=\Omega_1/q$, ($q=2, 3, 4$)下的横向非线性振动响应, 其中, $\Omega_1=11370\text{ r/min}$. 分析可知, 系统在亚临界转速 $\Omega=\Omega_1/q$, ($q=2, 3, 4$)时的时域响应呈现明显的多周期特点, 频谱图中有明显的高频成分, 系统发生超谐共振现象. 图8中 $\Omega=2697\text{ r/min}$, 即 $1/4$ 亚临界转速附近时, 轴心轨迹为4个椭圆的叠加, 频谱图中4倍频成分占主要成分; 图9中 $\Omega=3571\text{ r/min}$, 即 $1/3$ 亚临界转速附近时, 轴心轨迹为3个椭圆的叠加, 频谱图中3倍频成分占主要成分; 图10中 $\Omega=5628\text{ r/min}$, 即 $1/2$ 亚临界转速附近时, 轴心轨迹为2个椭圆的叠加, 频谱图中2倍频成分占主要成分.

4 结论

本文研究了系统的动力学特性, 建立了系统有限元模型, 详细推导了Timoshenko梁-空心轴常开裂纹转子系统的刚度矩阵, 用有限元法建立了系统的动力学方程, 并用谐波平衡法对运动方程进行求解, 分析了系统的非线性响应等动力学特性, 总结如下:

1) 分析了裂纹对系统临界转速的影响, 结果表明裂纹的出现使系统幅频图中临界转速和亚临界转速附近出现峰值; 同时裂纹“削弱”了系统刚度, 降低了临界转速的大小. 位于支承端附近的浅裂纹对系统的影响较小, 位于跨中靠近惯性量较大圆盘的深裂纹对系统的影响较大.

2) 计算了系统在亚临界转速(Ω_1/q ; $q=2, 3, 4$)附近的非线性振动响应, 结果表明亚临界转速下会发生超谐共振现象.

3) 本文建立的系统模型适用于空心轴裂纹转子系统的非线性动力学研究, 为航空发动机转子系统非线性振动的理论分析与数值模拟提供了理论依据.

参考文献:

- [1] 陈予恕, 张华彪. 航空发动机整机动力学研究进展与展望[J]. 航空学报, 2011, 32(8): 1371-1391.
CHEN Yushu, ZHANG Huabiao. Review and prospect on the research of dynamics of the aero-engine system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(8): 1371-1391. (in Chinese)
- [2] 顾家柳, 王能谦. 有裂纹悬臂转子的振动特性[J]. 航空动力学报, 1986, 1(2): 117-120.
GU Jialiu, WANG Nengqian. Vibrational characteristics of the cantilever rotor with a cracked shaft[J]. Journal of Aerospace Power, 1986, 1(2): 117-120. (in Chinese)
- [3] Gasch R. Dynamic behaviour of a simple rotor with a cross-sectional crack[C]// Proceedings of 1st International Conference on Vibration in Rotating Machinery. Cambridge, London: IMech E, 1976: 123-128.
- [4] Al-Shudeifat M A, Butcher E A, Stern C R. General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: analytical and experimental approach[J]. International Journal of Engineering Science, 2010, 48(10): 921-935.
- [5] Mayes I W, Davies W G R. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor[J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1984, 106(1): 139-145.
- [6] Sinou J J, Lees A. The influence of cracks in rotating shafts[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 285(4/5): 1015-1037.
- [7] 高建民, 朱晓梅. 转轴上裂纹开闭模型的研究[J]. 应用力学学报, 1992, 9(1): 108-112.
GAO Jianmin, ZHU Xiaomei. Study on the model of the shaft crack opening and closing[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1992, 9(1): 108-112. (in Chinese)
- [8] Han Q K, Chu F L. Parametric instability of a rotor-bearing system with two breathing transverse cracks[J]. European Journal of Mechanics: A Solids, 2012, 36: 180-190.
- [9] Sinou J J. Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor system[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, 42(7): 959-972.

- [10] 罗跃纲, 闻邦椿. 双跨转子系统裂纹-松动耦合故障的非线性响应[J]. 航空动力学报, 2007, 22(6): 996-1001.
LUO Yuegang, WEN Bangchun. Nonlinear responses of two-span rotor-bearing system with coupling faults of crack and pedestal looseness[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(6): 996-1001. (in Chinese)
- [11] Zou J, Li S, Hu C, et al. Fault diagnosis of cracked rotor using phase wavelet map[C]//Proceedings of 11th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). Gyeonggi-do, Korea: IEEE, 2011: 471-475.
- [12] 曾复. 裂纹转子非线性振动机理及实验研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2001.
ZENG Fu. Mechanism and experimental study on nonlinear vibration of cracked rotor[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2001. (in Chinese)
- [13] 郑艳平, 朱厚军. 裂纹转子的实验研究[J]. 汽轮机技术, 2006, 48(5): 364-366.
ZHENG Yanping, ZHU Houjun. Experimental research of a cracked rotor[J]. Turbine Technology, 2006, 48(5): 364-366. (in Chinese)
- [14] Papadopoulos C, Dimarogonas A. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 117(1): 81-93.
- [15] 曾复, 吴昭同. 含横向裂纹简单转子刚度的计算[J]. 机械科学与技术, 1999, 18(5): 745-747.
ZENG Fu, WU Zhaotong. Calculating stiffness of a simple rotor with a transverse crack[J]. Mechanical Science and Technology, 1999, 18(5): 745-747. (in Chinese)
- [16] Sinou J J, Lees A. A non-linear study of a cracked rotor[J]. European Journal of Mechanics: A Solids, 2007, 26(1): 152-170.
- [17] Al-Shudeifat M A. On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(11): 2795-2807.
- [18] Al-Shudeifat M A, Butcher E A. New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: Approach for critical and subcritical harmonic analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(3): 526-544.
- [19] 邓明. 航空燃气涡轮发动机原理与构造[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 87-156.
- [20] Zheng D, Fan S. Vibration and stability of cracked hollow-sectional beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 267(4): 933-954.
- [21] 钟一谔, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987: 176-192.
- [22] 航空发动机设计手册总编委会. 航空发动机设计手册: 第19分册 转子动力学及整机振动[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000: 124-130.

附录

刚度矩阵 $k_a^i, k_b^j, k_l^i, k_l^j, k_3^j$ 表示如下:

$$k_a^i = \frac{E}{l^3} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 12A_1(t) & 0 & 0 & 6lA_1(t) & -12A_1(t) & 0 & 0 & 6lA_1(t) \\ 0 & 12A_2(t) & -6lA_2(t) & 0 & 0 & -12A_2(t) & -6lA_2(t) & 0 \\ 0 & -6lA_2(t) & l^2 a_{12}(t) & 0 & 0 & 6lA_2(t) & l^2 a_{22}(t) & 0 \\ 6lA_1(t) & 0 & 0 & l^2 a_{11}(t) & -6lA_1(t) & 0 & 0 & l^2 a_{21}(t) \\ -12A_1(t) & 0 & 0 & -6lA_1(t) & 12lA_1(t) & 0 & 0 & -6lA_1(t) \\ 0 & -12A_2(t) & 6lA_2(t) & 0 & 0 & 12A_2(t) & 6lA_2(t) & 0 \\ 0 & -6lA_2(t) & l^2 a_{22}(t) & 0 & 0 & 6lA_2(t) & l^2 a_{12}(t) & 0 \\ 6lA_1(t) & 0 & 0 & l^2 a_{21}(t) & -6lA_1(t) & 0 & 0 & l^2 a_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (A1)$$

$$k_b^j = -\frac{E}{l^3} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -12A_3(t) & 6lA_3(t) & 0 & 0 & 12A_3(t) & 6lA_3(t) & 0 \\ -12A_3(t) & 0 & 0 & -6lA_3(t) & 12A_3(t) & 0 & 0 & -6lA_3(t) \\ 6lA_3(t) & 0 & 0 & l^2 a_{31}(t) & -6lA_3(t) & 0 & 0 & l^2 a_{41}(t) \\ 0 & -6lA_3(t) & l^2 a_{31}(t) & 0 & 0 & 6lA_3(t) & l^2 a_{41}(t) & 0 \\ 0 & 12A_3(t) & -6lA_3(t) & 0 & 0 & -12A_3(t) & -6lA_3(t) & 0 \\ 12A_3(t) & 0 & 0 & 6lA_3(t) & -12A_3(t) & 0 & 0 & 6lA_3(t) \\ 6lA_3(t) & 0 & 0 & l^2 a_{41}(t) & -6lA_3(t) & 0 & 0 & l^2 a_{31}(t) \\ 0 & -6lA_3(t) & l^2 a_{41}(t) & 0 & 0 & 6lA_3(t) & l^2 a_{31}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

$$\mathbf{k}_1^j = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I_1 & 0 & 0 & 6I_1 & -12I_1 & 0 & 0 & 6I_1 \\ 0 & 12I_1 & -6I_1 & 0 & 0 & -12I_1 & -6I_1 & 0 \\ 0 & -6I_1 & l^2 b_1 & 0 & 0 & 6I_1 & l^2 c_1 & 0 \\ 6I_1 & 0 & 0 & l^2 b_1 & -6I_1 & 0 & 0 & l^2 c_1 \\ -12I_1 & 0 & 0 & -6I_1 & 12I_1 & 0 & 0 & -6I_1 \\ 0 & -12I_1 & 6I_1 & 0 & 0 & 12I_1 & 6I_1 & 0 \\ 0 & -6I_1 & l^2 c_1 & 0 & 0 & 6I_1 & l^2 b_1 & 0 \\ 6I_1 & 0 & 0 & l^2 c_1 & -6I_1 & 0 & 0 & l^2 b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{k}_2^j = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I_2 & 0 & 0 & 6I_2 & -12I_2 & 0 & 0 & 6I_2 \\ 0 & 12I_3 & -6I_3 & 0 & 0 & -12I_3 & -6I_3 & 0 \\ 0 & -6I_3 & l^2 b_3 & 0 & 0 & 6I_3 & l^2 c_3 & 0 \\ 6I_2 & 0 & 0 & l^2 b_2 & -6I_2 & 0 & 0 & l^2 c_2 \\ -12I_2 & 0 & 0 & -6I_2 & 12I_2 & 0 & 0 & -6I_2 \\ 0 & -12I_3 & 6I_3 & 0 & 0 & 12I_3 & 6I_3 & 0 \\ 0 & -6I_3 & l^2 c_3 & 0 & 0 & 6I_3 & l^2 b_3 & 0 \\ 6I_2 & 0 & 0 & l^2 c_2 & -6I_2 & 0 & 0 & l^2 b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{k}_3^j = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & -12I_3 & 6I_3 & 0 & 0 & 12I_3 & 6I_3 & 0 \\ -12I_3 & 0 & 0 & -6I_3 & 12I_3 & 0 & 0 & -6I_3 \\ 6I_3 & 0 & 0 & l^2 b_3 & -6I_3 & 0 & 0 & l^2 c_3 \\ 0 & -6I_3 & l^2 b_3 & 0 & 0 & 6I_3 & l^2 c_3 & 0 \\ 0 & 12I_3 & -6I_3 & 0 & 0 & -12I_3 & -6I_3 & 0 \\ 12I_3 & 0 & 0 & 6I_3 & -12I_3 & 0 & 0 & 6I_3 \\ 6I_3 & 0 & 0 & l^2 c_3 & -6I_3 & 0 & 0 & l^2 b_3 \\ 0 & -6I_3 & l^2 c_3 & 0 & 0 & 6I_3 & l^2 b_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

式(A1)~式(A5)中元素表达式如下:

$$A_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} + \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} - \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$A_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} + \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} - \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$A_3(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} - \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) \sin(2\Omega t)$$

$$a_{11}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$a_{12}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$a_{21}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$a_{22}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \cos(2\Omega t)$$

$$a_{31}(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \sin(2\Omega t)$$

$$a_{41}(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \sin(2\Omega t)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} + \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) \quad I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\bar{x}}}{1+\phi_1} - \frac{I_{\bar{y}}}{1+\phi_2} \right) \quad I_3 = -I_2$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4+\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{4+\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \quad b_3 = -b_2$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} + \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2-\phi_1}{1+\phi_1} I_{\bar{x}} - \frac{2-\phi_2}{1+\phi_2} I_{\bar{y}} \right) \quad c_3 = -c_2$$